Mouvement dans un champ de forces centrales conservatives

Cadre de l'étude : Le mouvement du point matériel M de masse m sera étudié dans un référentiel **R** galiléen.

I. Forces centrales conservatives

1) Force centrale

Définition : Une force $\vec{f}$ s'appliquant au point matériel M est dite centrale lorsque **son support passe constamment par un point fixe O** du référentiel R. De plus, **la norme de cette force ne dépend que de la distance entre les deux points M et O** notée $r = \|\overrightarrow{OM}\|$: $\boxed{\boldsymbol{\vec{f} = f(r)\vec{e_r}}}$. Le point fixe 0 est désigné par **centre de force.**

2) Force centrale conservative - Energie potentielle associée

(Rappel chapitre 3 de mécanique)

Une force $\vec{f}$ est dite conservative si son travail dérive d'une énergie potentielle : $\delta W = \vec{f} d\vec{r} = -dE_p$.

Avec $\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}(\mathrm{r}\vec{\mathrm{e_r}}) = \mathrm{dr}.\vec{\mathrm{e_r}} + \mathrm{r}.\mathrm{d}\vec{\mathrm{e_r}}$ et $\vec{f} = f(r)\vec{\mathrm{e_r}}$ il vient $\delta W = f(r)dr = -dE_p$ car $\vec{\mathrm{e_r}}.\mathrm{d}\vec{\mathrm{e_r}} = 0$ (voir chapitre 1 de mécanique : dérivée d'un vecteur de norme constante).

Ainsi, l'énergie potentielle d'une force centrale conservative ne dépend que de r : $\boxed{\boldsymbol{f(r) = -\frac{dE_p}{dr}}}$

3) Exemple de l'interaction newtonienne

Définition : l'interaction newtonienne est associée à une force centrale conservative du type : $\boxed{\boldsymbol{\vec{f} = -\frac{k}{r^2}\vec{e_r}}}$

Si k>0 alors la force est attractive, elle est répulsive si k<0.

L'énergie potentielle newtonienne vérifie : $\frac{\mathrm{dE_p}}{\mathrm{dr}} = \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{r^2}}$ soit $\boxed{\mathbf{E_p = -\frac{k}{r} + constante}}$. On choisit en général la constante nulle de sorte que $E_p(r \to \infty) = 0$.

(Rappel chapitre 2 de mécanique)

Cas de l'interaction gravitationnelle :

Interaction attractive entre les points matériels M(m) et $\mathrm{O(m_0)}$.

$\boxed{\vec{\mathrm{f}} = \vec{\mathrm{f}}_{\mathrm{O\to M}} = -\mathrm{G}\frac{\mathrm{mm_0}}{\mathrm{r^2}}\vec{\mathrm{e_r}}(= -\vec{\mathrm{f}}_{\mathrm{M\to O}})}$ et $\boxed{\mathrm{E_p} = -\mathrm{G}\frac{\mathrm{mm_0}}{\mathrm{r}}}$

G : constante universelle de gravitation $G \approx 6{,}672 \times 10^{-11} N.m^2kg^{-2}$

Cas de l'interaction coulombienne :

Interaction attractive ou répulsive entre deux charges ponctuelles M(q) et $\mathrm{O(q_0)}$.

$\boxed{\vec{\mathrm{f}} = \vec{\mathrm{f}}_{\mathrm{O\to M}} = \frac{\mathrm{qq_0}}{4\pi\varepsilon_0\mathrm{r^2}}\vec{\mathrm{e_r}}(= -\vec{\mathrm{f}}_{\mathrm{M\to O}})}$ et $\boxed{\mathrm{E_p} = \frac{\mathrm{qq_0}}{4\pi\varepsilon_0\mathrm{r}}}$

ε_0 : permittivité du vide $\varepsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} F.m^{-1}$

II. Lois générales de conservation

1) Conservation du moment cinétique – Loi des aires

...

2) Conservation de l'énergie mécanique - Energie potentielle effective

...

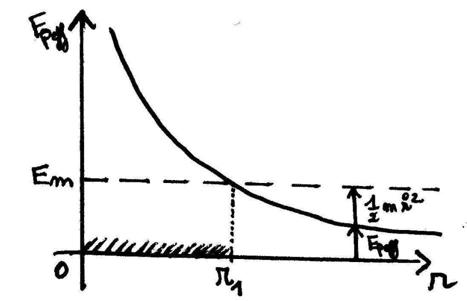
3) Etude graphique du mouvement : diagramme d'énergie potentielle effective

Il est possible de discuter qualitativement de la nature du mouvement du point matériel M soumis à une force centrale conservative à partir de l'allure de l'énergie potentielle effective en fonction de r et de la valeur de l'énergie mécanique fixée par les conditions initiales **(rappel Chapitre 3).**

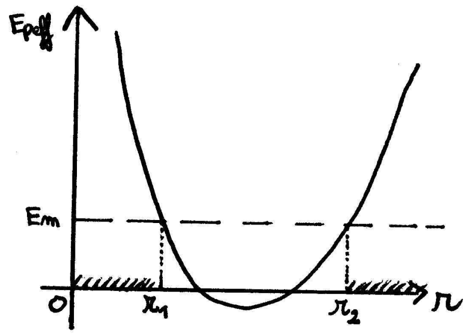
a) Etude du mouvement radial - Etat lié, état de diffusion

• Comme $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0$ alors $\boxed{E_m \geq E_{peff}(r)}$: cette inégalité fournit le domaine de valeurs permises pour $r = OM$.

Exemples :



//// domaine interdit car $E_{peff} > E_m$



On dit qu'un point matériel se trouve dans un <u>état de diffusion</u> (ou <u>état libre</u>) lorsqu'il est susceptible de s'éloigner à l'infini (du centre de force) :

$\boxed{r \geq r_1}$

On dit qu'un point matériel se trouve dans un <u>état lié</u> lorsqu'il est contraint de rester dans une zone finie de l'espace :

$\boxed{r_1 \leq r \leq r_2}$

b) Cas de l'interaction newtonienne

L'énergie potentielle de l'interaction newtonienne vérifie (voir partie I) : $E_p = -\frac{k}{r}$ d'où $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r}$.

A l'aide de la constante des aires et de la notion de potentiel effectif il vient :

$$\boxed{\mathbf{E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{peff}(r)}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\mathbf{E_{peff}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{k}{r}}}$$

Suivant le signe de k, l'interaction est :

- soit répulsive k<0 (interaction coulombienne entre charges de mêmes signes) ;
- soit attractive k>0 (interaction gravitationnelle - interaction coulombienne entre charges de signes opposés).

Nous allons déterminer la nature du mouvement radial d'un point matériel M subissant une interaction newtonienne attractive et répulsive.

...

III. L'interaction gravitationnelle

Dans cette partie, on se place dans le cadre de la force gravitationnelle $\vec{f} = \vec{f}_{O\to M} = -G\frac{mm_0}{r^2}\overrightarrow{e_r}$ avec $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$. On a donc une **force attractive** et la possibilité d'observer **des états de diffusion ($\boldsymbol{E_m \geq 0}$) et des états liés** ($\boldsymbol{E_m} < 0$).

Référentiels d'étude :

- **Au niveau du système solaire** le **référentiel galiléen de base** est le **référentiel de Copernic** dont l'origine est confondue avec le centre de masse du système solaire et dont les axes sont dirigés vers trois étoiles fixes très éloignées.
- **Pour l'étude du mouvement des planètes du système solaire**, **le référentiel de Kepler (ou héliocentrique)** est **une bonne approximation de référentiel galiléen**. Il a pour origine le centre du Soleil et ses axes sont parallèles à ceux du référentiel de Copernic.
- **L'étude du mouvement des satellites terrestres** est effectuée dans **le référentiel géocentrique** dont l'origine est le centre de la Terre et dont les axes sont parallèles à ceux du référentiel héliocentrique. Il sera supposé galiléen dans toute notre étude.

Au centre de force O correspondra le centre du Soleil ou de la Terre (fixe dans le référentiel d'étude choisi) et à M celui d'une planète ou d'un satellite.

1) Mouvements des planètes : lois de Kepler

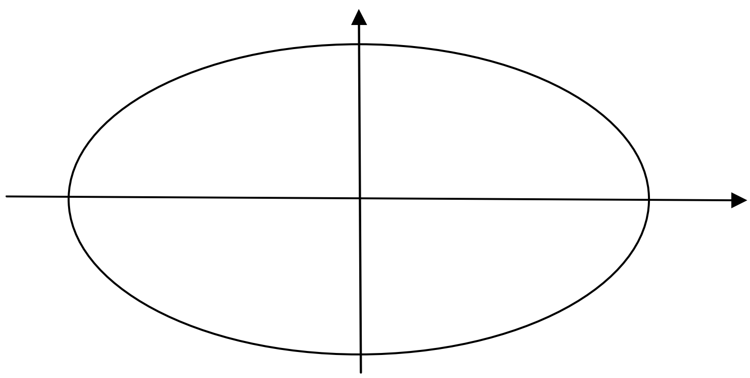
Les lois de Kepler ont été énoncées expérimentalement à partir de l'observation des planètes du système solaire.
Ces lois s'accompagnent des hypothèses suivantes :

- Le mouvement d'une planète quelconque $\mathcal{P}$ (centre P, masse m) est uniquement lié à l'interaction gravitationnelle entre cette planète et le Soleil $\mathcal{S}$ (centre S, masse m_S). On exclut donc toute influence des autres planètes ou objets célestes.
- Les planètes et le Soleil présentent une symétrie sphérique permettant de les assimiler à des points matériels P(m) et S(m_S).

Le mouvement d'une planète quelconque $\mathcal{P}$ qui gravite autour du Soleil $\mathcal{S}$ est régi par les trois lois suivantes énoncées par Kepler (1571-1630) :

- **1ère loi (loi des orbites)** : Le centre P de la planète décrit une ellipse dont l'un des foyers est le centre S du Soleil.
- **2ème loi (loi des aires)** : Le rayon vecteur $\overrightarrow{SP}$ balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux.
- **3ème loi (loi des périodes)** : Le rapport entre le carré de la période de révolution T d'une planète autour du Soleil et le cube du demi-grand axe a de l'ellipse est indépendant de la planète.

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \textbf{constante}} \qquad \left(\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_S}\right)$$



Remarques :
On peut noter que la 2ème loi de Kepler est une conséquence immédiate de la conservation du moment cinétique établie au §II.1.
De plus, cette conservation du moment cinétique entraine un mouvement plan. Comme le système est conservatif et que la force est attractive, il est possible d'observer un état lié correspondant à une énergie mécanique négative (voir §II.3). C'est ce que nous donne la 1ère loi de Kepler avec la trajectoire elliptique.

2) Les satellites terrestres

a) Etude générale

La Terre est assimilée à une sphère de centre O, de rayon R et de masse $\mathrm{m_T}$.
Un satellite, assimilé à un point matériel M (masse m) est repéré dans le référentiel géocentrique par le vecteur position $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{r}\overrightarrow{\mathrm{e_r}}$ avec $r = R + z$ où z désigne l'altitude du M par rapport au sol terrestre.
Le point matériel M subit la force gravitationnelle $\vec{\mathrm{f}} = \vec{\mathrm{f}}_{\mathrm{O\to M}} = -\mathrm{G}\frac{\mathrm{mm_T}}{\mathrm{r^2}}\overrightarrow{\mathrm{e_r}}$. On note $g_0 = \frac{G\mathrm{m_T}}{\mathrm{R^2}}$ l'intensité du champ de pesanteur terrestre au niveau du sol (r=R).

Le satellite étudié représente :
- soit un satellite naturel de la Terre - la Lune.
- soit un satellite artificiel utilisé pour l'observation (satellite météorologique) ou pour la transmission de signaux (satellite de télécommunication) qui est mis en orbite autour de la Terre au moyen de fusées.

b) Satellite en orbite circulaire (A SAVOIR REFAIRE)

...

c) Cas des satellites géostationnaires

Un satellite géostationnaire est immobile par rapport à un même lieu de la surface de la Terre. Ainsi il possède une période de révolution T_1 qui est égale à la période de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles soit environ 24h.

L'expression de la vitesse dans le cas d'une trajectoire circulaire (établie en b)) est : $\boldsymbol{v} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{g_0}\mathbf{R^2}}{\boldsymbol{r}}} = \boldsymbol{r\omega} = \boldsymbol{r}\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{T}}$

Ainsi **le rayon de l'orbite géostationnaire** vérifie $r_1 = \left(\frac{g_0\mathrm{R^2T_1^2}}{4\pi^2}\right)^{1/3}$ qui est **indépendant de la masse du satellite.**
En prenant $g_0 = 9{,}8m.s^{-2}$; $R = 6400km$ et $T_1 = 24h$, on trouve : $\mathrm{r_1} = 4{,}2.10^4\mathrm{km}$ et $\mathrm{v_1} = 3{,}1\mathrm{km.s^{-1}}$.

d) Généralisation aux trajectoires elliptiques

On a démontré la 3ème loi de Kepler pour une trajectoire circulaire. En remplaçant le rayon du cercle par le demi grand axe de l'ellipse on retrouve la 3ème loi de Kepler énoncé initialement où T représente la période du mouvement elliptique.

On admet de même que l'énergie mécanique correspondant à la trajectoire elliptique de demi grand axe a vérifie : $E_m = -G\frac{\mathrm{mm_T}}{2a} = -\frac{\mathrm{m}g_0\mathrm{R^2}}{2a}$.

e) Vitesse de libération et trajectoire libre (parabolique et hyperbolique)

On a montré au paragraphe II.3) que dans le cas de l'interaction gravitationnelle (force newtonienne attractive), outre des états liés, on peut aussi observer des états libres (ou de diffusion) pour lesquels le point matériel M peut partir à l'infini.
Dans le cas d'un satellite qui part à l'infini, on dit qu'il « échappe » à l'attraction terrestre. Il s'agit d'un abus de langage car le satellite est toujours soumis à l'attraction terrestre mais son état est libre et non plus lié et sa trajectoire est alors parabolique ou hyperbolique et non plus elliptique (ou circulaire).

L'objectif de ce paragraphe est de déterminer la vitesse nécessaire pour atteindre un état libre. D'après la discussion qualitative sur la nature du mouvement faite au paragraphe II.3), **il faut que l'énergie mécanique soit positive pour que l'état soit libre.**

Ainsi dans le cas limite : $E_m = 0 = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{\mathrm{mm_T}}{r}$ soit $v = \sqrt{\frac{2G\mathrm{m_T}}{r}} = \sqrt{\frac{2g_0\mathrm{R}^2}{r}}$.

Si on suppose que le satellite est lancé du sol terrestre (r=R) alors il faudra lui communiquer la vitesse dite de libération ou 2ème vitesse cosmique $v_{c2} = \sqrt{2g_0\mathrm{R}}$ pour qu'il puisse atteindre un état libre.

AN : $v_{c2} = 11{,}2\ \mathrm{km.s^{-1}}$. On remarque que $v_{c2} = \sqrt{2}.v_{c1}$.

Comme l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement alors le satellite aura une vitesse nulle à l'infini. **Sa trajectoire correspondant à $E_m = 0$ est alors parabolique**.

Si on souhaite que le satellite garde une vitesse non nulle à l'infini, il faut que son énergie mécanique soit strictement positive et donc que sa vitesse de lancement soit supérieure à v_{c2}. **Sa trajectoire correspondant à $E_m > 0$ est alors hyperbolique.**

Conclusion sur la mise en orbite d'un satellite

Pour mettre en orbite un satellite depuis le sol terrestre sans qu'il s'éloigne à l'infini (état lié) il faut choisir une vitesse de lancement comprise entre v_{c1} (1ère vitesse cosmique) et v_{c2} (2ème vitesse cosmique ou vitesse de libération).